

0.1 Model número 13

Aquest és un model tipus test. Es tracta d'encerclar una opció i raonar la resposta en cada cas.

- En \mathbb{R}^3 es consideren els subespais $U = \langle (1, 0, 1) \rangle$, $V = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 1) \rangle$ i $W = \langle (1, 0, 0), (0, 0, 1) \rangle$. Aleshores
 - U i V són subespais suplementaris.
 - U i W són subespais suplementaris.
 - V i W són subespais suplementaris.
 - Totes les respostes anteriors són falses.
- Dos subespais F i G de E són suplementaris si i només si
 - $E = F + G$
 - $F \cap G = \{0\}$
 - $E = F + G$ i $F \cup G = \{0\}$
 - Cap de les respostes anteriors és certa.
- Sigui E un espai vectorial sobre \mathbb{R} . Indica l'afirmació correcta:
 - La seva dimensió és el rang de qualsevol conjunt de vectors de E .
 - La seva dimensió és el número de bases que existeixen en E .
 - La seva dimensió és el número de vectors de qualsevol sistema generador de E .
 - La seva dimensió és el número mínim de vectors que formen un sistema generador de E .
- Sigui $(G, *)$ un grup. Podem afirmar
 - L'element neutre e és únic.
 - L'element simètric de tot element de G és únic.
 - Tot element de G té simètric.
 - Totes les respostes anteriors són certes.
- Es defineix en \mathbb{R} l'operació $a \oplus b = ab + 2a - 3b - 1$. Aleshores $2x \oplus (y - 2) =$
 - $2xy - 3y + 5$
 - $xy + 2x - 3y + 1$
 - $2xy + 2x - 3y + 5$
 - Cap de les anteriors és certa.
- Sigui $f : E \rightarrow F$ una aplicació lineal. Llavors, les imatges d'un conjunt de vectors linealment independent de E és un conjunt de vectors linealment independent de F si:
 - f és injectiva.
 - $\text{Nuc } f \neq \{\vec{0}\}$
 - f és exhaustiva.
 - Cap de les anteriors és certa.
- La dimensió de l'espai vectorial $M_3^s(\mathbb{R})$, matrius quadrades simètriques d'ordre 3, és:
 - 9
 - 6
 - 3
 - Totes les anteriors són falses.
- Donat l'espai vectorial \mathbb{R}^n es pot afirmar que:

-
- (a) Existeix una única base de \mathbb{R}^n i es diu base canònica.
- (b) Existeix un nombre finit de bases de \mathbb{R}^n i depèn de la dimensió.
- (c) Existeix un nombre infinit de bases de \mathbb{R}^n .
- (d) Cap de les respostes anteriors és correcta.
9. Un endomorfisme és:
- (a) Una aplicació lineal entre dos espais vectorials d'igual dimensió.
- (b) Una aplicació lineal d'un espai vectorial en si mateix.
- (c) Una aplicació lineal bijectiva.
- (d) Totes les anteriors són falses.
10. Una matriu quadrada A d'ordre n tal que $A^t = A$ es diu que és:
- (a) Simètrica.
- (b) Antisimètrica.
- (c) Regular.
- (d) No pot existir tal matriu.
11. Siguin $u = (a, b)$ i $v = (c, d)$ dos vectors de \mathbb{R}^2 . Llavors, la condició necessària i suficient per què u i v siguin linealment dependents és que:
- (a) $ac - bd = 0$
- (b) $ad + bc = 0$
- (c) $ad - bc = 0$
- (d) $ad - bc \neq 0$
12. Siguin E i F dos espais vectorials sobre el mateix cos. Sigui $f : E \rightarrow F$ una aplicació lineal. Llavors:
- (a) $f(E)$ és un subespai vectorial de F .
- (b) $Nuc f$ és un subespai vectorial de E .
- (c) (a) i (b) són certes.
- (d) Cap de les anteriors és certa.
13. En els mateixes condicions que la pregunta anterior amb f isomorfisme. Llavors:
- (a) $Nuc f = \{0\}$
- (b) $Im f = F$
- (c) $dim(Im f) = dim(E)$
- (d) Totes les respostes anteriors són certes.
14. Considerem l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida per $f(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$. Llavors, una base del subespai vectorial $Nuc f$ és:
- (a) $(3, -1, 1)$
- (b) $(1, 2, -1), (0, 1, 1)$
- (c) $(1, 2, -1), (0, 1, 1), (1, 1, -2)$
- (d) Cap de les anteriors pot ser base.
15. Siguin E i F dos espais vectorials sobre el mateix cos. Sigui $f : E \rightarrow F$ una aplicació lineal i k un escalar. Llavors:
- (a) $Im(f) = Im(kf)$ per tot k .

- (b) $Im(f) \neq Im(kf)$ per tot k .
- (c) $Im(f) = Im(kf)$ per algun k .
- (d) Cap de les anteriors és certa.
16. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ un epimorfisme. Podem afirmar:
- (a) f no és necessàriament un monomorfisme.
- (b) f no és necessàriament un monomorfisme, encara que el nucli sigui 0.
- (c) No pot existir un epimorfisme de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^4 .
- (d) L'aplicació és un isomorfisme.
17. Siguin E i F dos espais vectorials sobre el mateix cos tals que $dim(E) = m$ i $dim(F) = n$ amb $m < n$. Sigui $f : E \rightarrow F$ una aplicació lineal. Llavors:
- (a) f no pot ser mai un monomorfisme d'espais vectorials.
- (b) f no pot ser mai un epimorfisme.
- (c) No podem dir res del caràcter de f (epi o mono).
- (d) f és un isomorfisme.
18. Dues matrius A i B es poden sumar:
- (a) Sempre.
- (b) Si tenen el mateix nombre de files i el mateix nombre de columnes.
- (c) Si tenen el mateix nombre de files.
- (d) Únicament si són matrius quadrades.
19. Direm que una matriu A és nilpotent d'ordre k quan $A^k = 0$ i $A^{k-1} \neq 0$. La matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (a) És nilpotent d'ordre 2.
- (b) És nilpotent d'ordre 3.
- (c) No és nilpotent.
- (d) És nilpotent d'ordre n .
20. Si A és una matriu triangular inferior i B és una matriu triangular superior de manera que es pot fer el producte AB , aleshores
- (a) AB és una matriu triangular inferior.
- (b) AB és una matriu triangular superior.
- (c) AB no te, en general, estructura triangular.
- (d) Cap de les anteriors és certa.
21. Siguin A i B les dues matrius següents:
- $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$$
- Llavors, la igualtat $AB = BA$ és certa:
- (a) Sempre per qualssevol a, b, c, d .
- (b) En cap cas.
- (c) Per alguns valors de a, b, c, d .
- (d) Només si $a = d = 0$

Solució al model número 13

Les respostes correctes a cada qüestió són:

1-(a); 2-(d); 3-(d); 4-(d); 5-(a); 6-(a); 7-(b); 8-(c); 9-(b); 10-(a); 11-(c); 12-(c); 13-(d); 14-(a); 15-(c); 16-(c); 17-(b); 18-(b); 19-(b); 20-(c); 21-(a).

Anem a veure el perquè:

Qüestió 1

Facem cada apartat. Abans però, per l'ús que en farem, calculem les equacions de cada subespai¹.

Eq. de U : U té dimensió 1, per tant, hi haurà $3 - 1 = 2$ equacions. Llavors, qualsevol vector que afegim a la base no pot augmentar-li el rang. Això vol dir que

$$\text{rang} \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \implies \begin{cases} y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

són les seves equacions.

Eq. de V : V té dimensió 2, per tant, hi haurà $3 - 2 = 1$ equació. Com en el cas anterior, qualsevol vector que afegim a la base no pot augmentar-li el rang. Això vol dir que

$$\text{rang} \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \implies y - z = 0$$

és l'equació que defineix V .

Eq. de W : W també té dimensió 2, per tant, també com en el cas anterior, tindrà 1 equació, i qualsevol vector que afegim a la base no pot augmentar-li el rang. Això vol dir que

$$\text{rang} \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \implies y = 0$$

és l'equació que defineix W .

Tenim, doncs, les equacions que defineixen cada subespai. La definició de suma directa és la definició de subespais suplementaris. Vegem quina és la resposta correcta.

- (a) $U + V$ vindrà generat per $\langle (1, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 1) \rangle$ (és a dir, la unió de les dues bases), que, a més, són linealment independents. Per tant, els tres vectors formen una base. Llavors $\dim(U + V) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. D'on, per la propietat de les dimensions, $U + V = \mathbb{R}^3$.

Vegem ara la intersecció. Per trobar-la usem les equacions. Un vector que pertanyi a $U \cap V$ verificarà les equacions de cada subespai, per tant, serà solució del sistema

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ x - z &= 0 \\ y - z &= 0 \end{aligned}$$

que és $(0, 0, 0)$. Per tant, $U \cap V = \{(0, 0, 0)\}$.

Com que es compleixen les dues condicions de suma directa, els dos subespais, U i V , són suplementaris. **La resposta (a) és correcta.**

- (b) Anàlogament, $U + W$ vindrà generat per $\langle (1, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 0, 1) \rangle$. Aquests vectors no són linealment independents. Només n'hi ha dos d'independents. Llavors, $\dim(U + W) = 2 = \dim W$. A més $W \subseteq U + W$. Per la propietat de les dimensions, $U + W = W$.

Llavors no cal ja calcular $U \cap W$ perquè no poden ser mai suplementaris. Per tant, **(b) és fals.**

- (c) Vegem $V + W$. Aquest subespai estarà generat pels vectors de cada una de les bases, $\langle (1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0) \rangle$, dels quals n'hi ha tres linealment independents. Llavors tenim $\dim(V + W) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Com en el cas (a), $V + W = \mathbb{R}^3$.

Quant a la intersecció, ja es veu que el vector $(1, 0, 0)$ pertany als dos subespais, per tant, $V \cap W \neq \{(0, 0, 0)\}$. Això vol dir que no poden ser suplementaris. Llavors **(c) és fals.**

¹Sabem que, donat un subespai S , el número d'equacions que el defineixen és $\dim E - \dim S$

Qüestió 2

Tenint en compte la definició de subespai suplementari, cap dels apartats (a), (b) i (c) són correctes, per tant **la resposta és (d)**. ■

Qüestió 3

La dimensió d'un espai vectorial E , és el nombre de vectors d'una base de E . Per tant, és el número mínim de vectors que formen un sistema generador (=base). **La resposta correcta és, doncs, (d)**. ■

Qüestió 4

Facem cada apartat:

(a) Cert. Vegem-ho.

Suposem que hi hagi dos elements neutres, e_1 i e_2 . Per ser e_2 element neutre tenim: $e_1 = e_1 * e_2$. Per ser-ho e_1 tenim: $e_1 * e_2 = e_2$. Per tant, $e_1 = e_2$, la qual cosa diu que l'element neutre és únic.

(b) També és cert. Vegem-ho.

Suposem que un element a tingui dos elements simètrics, a_1 i a_2 . Tenim (recordem que a' és simètric de a si i només si $a' * a = e$ i $a * a' = e$)

$$a_1 = a_1 * e = a_1 * (a * a_2) = (a_1 * a) * a_2 = e * a_2 = a_2$$

Per tant, aquest element simètric és únic.

(c) També és cert ja que aquesta afirmació forma part de la definició de grup.

Per tant, totes les respostes són certes. **La resposta bona és (d)**. ■

Qüestió 5

Facem l'operació:

$$2x \oplus (y - 2) = 2x(y - 2) + 2 \cdot 2x - 3 \cdot (y - 2) - 1 = 2xy - 3y + 5$$

Per tant, **la resposta correcta és (a)**. ■

Qüestió 6

Facem cada apartat:

(a) Aquest és cert. Vegem-ho.

Si les imatges, $f(x_1), \dots, f(x_n)$, fossin linealment dependents, voldria dir que un d'ells, per exemple $f(x_n)$, seria combinació lineal dels altres. Per tant, hi haurien $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$, de manera que

$$f(x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_{n-1} f(x_{n-1})$$

Passant al primer membre

$$f(x_n) - \lambda_1 f(x_1) - \dots - \lambda_{n-1} f(x_{n-1}) = 0$$

és a dir (f és lineal),

$$f(x_n - \lambda_1 x_1 - \dots - \lambda_{n-1} x_{n-1}) = 0 \implies x_n - \lambda_1 x_1 - \dots - \lambda_{n-1} x_{n-1} \in Nuc f$$

i, com que f és injectiva, $Nuc f = \{\vec{0}\}$, la qual cosa vol dir que

$$x_n - \lambda_1 x_1 - \dots - \lambda_{n-1} x_{n-1} = 0 \implies x_n = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1}$$

i que llavors x_n seria combinació lineal dels altres, la qual cosa contradia el fet que x_1, \dots, x_n són linealment independents.

Llavors **(a) és certa**.

- (b) Aquesta afirmació és falsa, ja que si $Nuc f \neq \{\vec{0}\}$, agafem $u, v \in Nuc f$, amb u, v linealment independents. Però les seves imatges $f(u) = f(v) = \vec{0}$, són linealment dependents. Per tant, si $Nuc f \neq \{\vec{0}\}$ hi pot haver vectors independents amb imatges dependents.
- (c) Fals també. Agafem, per exemple, $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de manera que $f(1, 0, 0) = 0$, $f(0, 1, 0) = 0$ i $f(0, 0, 1) = 1$. Aquesta aplicació és exhaustiva i les imatges de $(1, 0, 0)$ i $(0, 1, 0)$ no són linealment independents. ■

Qüestió 7

Agafem una matriu quadrada, $A_{3 \times 3}$, simètrica,

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} = aI_1 + bI_2 + cI_3 + dI_4 + eI_5 + fI_6$$

on

$$\begin{aligned} I_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & I_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & I_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ I_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & I_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & I_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

que són linealment independents i sistema generador de $M_3^s(\mathbb{R})$, i, per tant, base. Llavors la dimensió és 6.

La resposta correcta és (b). ■

Qüestió 8

Com ja sabem, tot espai vectorial de dimensió finita admet infinites bases, totes formades pel mateix nombre de vectors. Llavors, la resposta correcta és (c). ■

Qüestió 9

Per definició, un endomorfisme és un morfisme d'un espai vectorial en si mateix. Llavors (b) és la resposta correcta. ■

Qüestió 10

Tal com diu la definició de matriu simètrica, la resposta correcta és (a). ■

Qüestió 11

Dos vectors són linealment dependents si el seu rang és 1. Per tant, la matriu

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

formada per les coordenades dels vectors en columna, té determinant 0. Això és equivalent a dir que $ad - bc = 0$.

La resposta correcta és (c). ■

Qüestió 12

Vegem cada apartat:

- (a) Cert, per la propietat que té el subespai imatge.
- (b) Cert, tal com es veu a la definició del nucli.

Per tant **(c) és la resposta correcta.**

Qüestió 13

Tal com es recull a les propietats dels isomorfismes, **la resposta correcta és (d).**

Qüestió 14

Calculem el nucli de l'aplicació lineal. Es tracta de resoldre el sistema

$$\begin{aligned}x + 2y - z &= 0 \\y + z &= 0 \\x + y - 2z &= 0\end{aligned}$$

Aquest sistema té per solució: $x = 3z$, $y = -z$, $z = z$. Per tant, un vector del nucli és de la forma $(3z, -z, z) = z(3, -1, 1)$. Llavors, **la resposta correcta és (a).**

Qüestió 15

Vegem cada apartat:

- (a) Fals. Basta agafar $k = 0$ per veure que aquesta afirmació no és certa.
- (b) Fals també. Si agafem $k = 1$ és clarament una igualtat.
- (c) Cert. Per exemple $k = 1$ ho compleix.

Llavors **la resposta correcta és (c).**

Qüestió 16

Observem que per si f és un epimorfisme, aleshores $f(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^4$. Això vol dir que si agafem la base canònica de \mathbb{R}^3 , formada per tres vectors, i calculem la seva imatge ens dóna una base de \mathbb{R}^4 , que tindrà quatre vectors, la qual cosa és impossible. Llavors mai no podem tenir un epimorfisme d'un espai de dimensió 3 en un de dimensió 4.

Llavors **la resposta correcta és (c).**

Qüestió 17

Com a la qüestió anterior, mai no pot existir un epimorfisme d'un espai de dimensió m en un de dimensió n , amb $m < n$.

La resposta correcta és (b).

Qüestió 18

Podem sumar dues matrius quan són del mateix ordre, és a dir, quan el nombre de files coincideix i el número de columnes també. Llavors **la resposta correcta és (b).**

Qüestió 19

Calculem les potències de A :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, és nilpotent d'ordre 3.

La resposta correcta és (b).

■

Qüestió 20

Agafem dues matrius A i B a l'atzar que compleixin les condicions i fem el producte. Siguin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El producte $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ veiem que no té estructura triangular. Llavors **la resposta correcta és (c).**

■

Qüestió 21

Facem el producte:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} ac + bd & bc + ad \\ bc + ad & ac + bd \end{pmatrix} = B \cdot A$$

Llavors aquestes dues matrius commuten pel producte per qualssevol valors de a, b, c, d . Per tant, **la resposta correcta és (a).**

■