

## Problemes proposats

1. Demostreu les següents propietats:

(a)  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ , per a tot  $n \in \mathbb{N}$ .

(b)  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ , per a tot  $n \in \mathbb{N}$ .

2. Considerem les successions  $a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$  i  $b_n = \sqrt{\frac{a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2}{2}}$ , amb primers termes  $a_0, b_0$ ,  $0 < a_0 < b_0$ . Calculeu el límit de la successió

$$c_n = \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})a_n}{a_n - b_n}$$

3. Proveu que  $x^2 - x \sin x = \cos x$  té exactament dues arrels.

## Solucions als problemes proposats

### Problema 1

Els dos apartats d'aquest problema es poden fer aplicant el principi d'inducció. De fet, aquesta és la intenció dels enunciats d'aquest problema.

(a) Hem de veure que  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ . Llavors, el nostre conjunt  $A$  serà

$$A = \{n \in \mathbb{N} / 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2\}$$

i la nostra propietat  $p(n)$  és  $p(n) : 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ . Si volem aplicar el principi d'inducció, hem de veure,

i. El número 1 compleix la propietat  $p(n)$ , és a dir, que  $p(1)$  és certa. Efectivament

$$p(1) : 1 = 1^2 = 1$$

ii. Si suposem que  $p(k)$  és certa, aleshores hem de demostrar que  $p(k + 1)$  és també certa, per a tot  $k \geq 1$ . Vegem: suposem certa  $p(k)$ , és a dir

$$1 + 3 + \dots + (2k - 1) = k^2$$

Vegem ara que  $p(k + 1) : 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$  també és certa a partir de la suposició anterior. Per això fem

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) &= (1 + 3 + \dots + (2k - 1)) + (2k + 1) \stackrel{\text{Inducció}}{=} \\ &= k^2 + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2 \end{aligned}$$

com volíem veure.

Per tant, hem demostrat que tot número  $n$  compleix la propietat  $p(n)$ . Llavors la propietat és certa per a tot  $n \in \mathbb{N}$ .

(b) Com abans, hem de veure que  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ , llavors

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} / p(n) : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\}$$

i. El número 1 compleix la propietat  $p(n)$ , és a dir, que  $p(1)$  és certa. Efectivament

$$p(1) : 1^2 = 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$$

ii. Si suposem que  $p(k)$  és certa, aleshores hem de demostrar que  $p(k+1)$  és també certa, per a tot  $k \geq 1$ . Vegem: suposem certa  $p(k)$ , és a dir

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Vegem ara que  $p(k+1) : 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$  també és certa a partir de la suposició anterior. Per això fem

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &= (1^2 + 2^2 + \dots + k^2) + (k+1)^2 \stackrel{\text{Inducció}}{=} \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{6(k+1)^2}{6} = \\ &= \frac{(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1))}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \end{aligned}$$

com volíem veure.

### Problema 2

La successió  $c_n$  es pot escriure així:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})a_n}{a_n - b_n} = \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})a_n}{(a_n - b_n)(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})} = \frac{(a_n - b_n)a_n}{(a_n - b_n)(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})} = \\ &= \frac{a_n}{\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}} \end{aligned}$$

Aleshores, si  $a_n$  i  $b_n$  són successions convergents,  $c_n$  també ho serà, sempre que el denominador no s'anul·li. Vegem qui pot ser el límit de  $c_n$ . Suposem que les successions  $a_n$  i  $b_n$  són convergents, amb límits  $a$  i  $b$  respectivament. Aleshores

$$\begin{aligned} \lim a_n &= \lim \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \implies a = \frac{a+b}{2} \iff a = b \\ \lim b_n &= \lim \sqrt{\frac{a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2}{2}} \implies b = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \implies b^2 = a^2 \end{aligned}$$

Aleshores,  $a = b$ , i, llavors

$$\lim c_n = \lim \frac{a_n}{\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}} = \frac{a}{\sqrt{a} + \sqrt{a}} = \frac{a}{2\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{2}$$

Llavors hem de demostrar que  $a_n$  i  $b_n$  són convergents. Per això usarem

- $a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ .
- $b_n^2 = \frac{a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2}{2}$ .
- $2xy < x^2 + y^2$ , per a qualssevol  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Aleshores

(a) Vegem que, per a cada  $n$ ,  $a_n < b_n$ . Efectivament,

$$\begin{aligned} a_n^2 &= \left( \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \right)^2 = \frac{a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2 + 2a_{n-1}b_{n-1}}{4} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{2} < \frac{1}{2} \frac{a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2}{2} = \\ &= \frac{a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2}{2} = b_n^2 \end{aligned}$$

d'on tenim

$$a_n^2 < b_n^2 \implies a_n < b_n, \quad \text{per a tot } n$$

(b)  $a_n$  és creixent i fitada superiorment.

Creixent. Vegem que  $a_n > a_{n-1}$ , per a tot  $n$ .

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \stackrel{(*)}{>} \frac{a_{n-1} + a_{n-1}}{2} = a_{n-1}$$

(\*) apliquem l'apartat (a).

Fitada. Vegem que, per a tot  $n$ ,  $a_n < b_0$ . Ho farem per inducció.

- Per a  $n = 1$ :  $a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} < \frac{b_0 + b_0}{2} = b_0$ . Llavors, compleix.
- Suposem cert per a  $n$ , és a dir, suposem que  $a_n < b_0$ . Vegem que també es verifica  $a_{n+1} < b_0$ .

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_{n-1}}{2} \stackrel{\text{Inducció}}{<} \frac{b_0 + b_{n-1}}{2} \stackrel{(*)}{<} \frac{b_0 + b_0}{2} = b_0$$

(\*) Aquí usem el fet que  $b_n$  és decreixent, cosa que demostrarem més avall, i, per tant,  $b_n < b_0$  per a tot  $n$ .

Llavors, la successió està fitada superiorment per  $b_0$ .

Això demostra que la successió  $a_n$  és convergent. El seu límit li direm  $a$ .

(c)  $b_n$  és decreixent i fitada inferiorment.

Decreixent. Vegem que  $b_n < a_{n-1}$ , per a tot  $n$ .

$$b_n^2 = \frac{a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2}{2} \stackrel{(*)}{<} \frac{b_{n-1}^2 + b_{n-1}^2}{2} = b_{n-1}^2 \implies b_n < b_{n-1}$$

(\*) apliquem l'apartat (a).

Fitada. Vegem que, per a tot  $n$ ,  $b_n > a_0$ .

$$b_n^2 = \frac{a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2}{2} \stackrel{(*)}{>} \frac{a_{n-1}^2 + a_{n-1}^2}{2} = a_{n-1}^2 > a_0$$

(\*) apliquem l'apartat (a).

L'última desigualtat s'obté del fet que  $a_n$  és creixent, cosa que ja hem demostrat.

Això demostra que la successió  $b_n$  és convergent. Al seu límit li direm  $b$  (=  $a$  com hem vist anteriorment).

Llavors,  $c_n$  també és convergent i el seu límit és  $\frac{\sqrt{a}}{2}$ .

### Problema 3

Considerem la funció  $f(x) = x^2 - x \sin x - \cos x$ , que és contínua i derivable en tot  $\mathbb{R}$ , perquè és suma de funcions contínues i derivables. Vegem que té, com a mínim, dos zeros. Per això apliquem el teorema de Bolzano en els següents intervals

$$\begin{aligned} \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right] &\implies f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2 - 2\pi}{4} > 0 \text{ i } f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2 - 2\sqrt{2}\pi - 8\sqrt{2}}{16} < 0 \\ \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] &\implies f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2 - 2\sqrt{2}\pi - 8\sqrt{2}}{16} < 0 \text{ i } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2 - 2\pi}{4} > 0 \end{aligned}$$

amb la qual cosa, pel teorema de Bolzano, hi ha una arrel dins cada interval. Diguem-los  $a_1$  i  $a_2$ . Vegem que no n'hi ha més.

Suposem que hi hagi una tercera arrel,  $b$ . Suposem que  $b > a_2$ . Aleshores, pel teorema de Rolle, hi ha un punt,  $c_1$ , entre  $a_1$  i  $a_2$  de manera que  $f'(c_1) = 0$ ; i també hi ha un punt,  $c_2$ , entre  $a_2$  i  $b$  de manera que  $f'(c_2) = 0$ . Però, la derivada de  $f$  és

$$f'(x) = 2x - \sin x - x \cos x + \sin x = x(2 - \cos x)$$

que s'anul·la només en el punt  $x = 0$ . Això contradiu el fet que la primera derivada hauria de tenir dues arrels  $c_1$  i  $c_2$ .

Per tant, no pot ser que hi hagi tres o més arrels de la funció  $f(x)$ .

NOTA: Si  $a_1 < b < a_2$  es fa el mateix raonament agafant els intervals  $[a_1, b]$  i  $[b, a_2]$ . I el mateix passa si  $b < a_1 < a_2$ , agafaríem els intervals  $[b, a_1]$  i  $[a_1, a_2]$ .